**Kansrekening** 3-7-'03

## Tentamenopgave[1]

### I

Uit een vaas met 5 rode, 5 witte en 10 zwarte ballen worden er 10 ballen zonder terugleggen getrokken.

a. Bereken de kans dat er precies 3 rode ballen zijn in de steekproef.

b. Bereken de kans dat er precies 3 rode, 2 witte en 5 zwarte ballen zijn in de steekproef.

### II

1. Laat $X$ en $Y$ onafhankelijke normaal verdeelde stochastische variabelen zijn, ieder verdeeld met de dichtheid

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}.$$

Bepaal de verdeling van $Z = X/|Y|$.

2. Toon aan dat in het algemeen niet geldt dat $EZ = EX/E|Y|$.

### III

Zij $\Omega = [0,1]$ voorzien van de lengtemaat $P$ als kansmaat. Kortom: $\Omega = [0,1]$ is voorzien van de uniforme verdeling. Zij, voor $\omega \in \Omega$, $X_n(\omega) \in \{0,1,\ldots,9\}$ de $n$de term in de decimale ontwikkeling van $\omega$. Er geldt dus $\omega = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n(\omega)}{10^n}$.

1. Toon aan dat $E(X_n) = 9/2$ en $\sigma^2(X_n) = 33/4$.

Zij

$$S_n(\omega) = \sum_{k=1}^{n} X_k(\omega).$$

en voor $\lambda \in \mathbb{R}$ zij $A_n(\lambda) = \{\omega \in \Omega : \dfrac{2S_n(\omega) - 9n}{\sqrt{33n}} \leq \lambda\}$.

2. Toon aan dat

$$\lim_{n\to\infty} P(A_n(\lambda)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\lambda} e^{-x^2/2} dx$$

Aanwijzing: Je mag aannemen dat de $X_n : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ onafhankelijke en gelijk verdeelde stochastische variabelen zijn, met voor $r \in \{0,1,\ldots,9\}$, $P(X_k = r) = \frac{1}{10}$.

### IV

Laat $(X_k)_{k\geq 1}$ onafhankelijke stochastische variabelen zijn, gedefinieerd op $\Omega$, met negatief exponentiële verdeling met parameter $\lambda > 0$:

$$P(X_k \leq x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt, \quad x \geq 0.$$

1. Bereken $\mu = E(X_k)$ en $\sigma^2(X_k)$.

2. Bepaal de verdeling van $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

3. Geef aan wat je weet over de limiet $\lim_{n\to\infty} \dfrac{S_n}{n}$. In het bijzonder:

a. Geef voor $a > 0$ een schatting van

$$P(|\frac{S_n}{n} - \mu| \geq a).$$

b. Geef aan of in dit geval $\dfrac{S_n(\omega)}{n}$ convergeert voor bijna alle $\omega \in \Omega$.

[1] De onderdelen I, II, III en IV zijn onafhankelijk.

Woonplaats: [illegible] | Jaar van eerste inschrijving: [illegible]

7

~~I a Er zijn 5! ... 120 mogelijke volgordes van rode / niet-rode ballen.~~

I-a Er zijn $\frac{10!}{3!(10-3)!} = 120$ mogelijke ordeningen van rode / niet-rode ballen. De kans op één zo'n mogelijkheid is:

$\underbrace{\frac{5}{20} \cdot \frac{4}{19} \cdot \frac{3}{18}}_{\text{rode}} \cdot \underbrace{\frac{15}{17} \cdot \frac{14}{16} \cdot \ldots \cdot \frac{9}{11}}_{\text{niet-rode}} = \frac{\frac{5!}{2!} \cdot \frac{15!}{8!}}{\frac{20!}{10!}} = \frac{5! \cdot 15! \cdot 10!}{2! \cdot 8! \cdot 20!}$

$\approx 0{,}002902$

Voor elk v.d. mogelijkheden is deze kans hetzelfde, dus de kans op precies 3 rode ballen is $120 \cdot 0{,}002902 = 0{,}3483$ ✓

b Hiervoor zijn $\frac{10!}{3!\,2!\,5!} = 2520$ mogelijke volgordes. De kans dat een ~~rode~~ bepaalde volgorde hiervan optreedt is:

$\underbrace{\frac{5}{20} \cdot \frac{4}{19} \cdot \frac{3}{18}}_{\text{rode}} \cdot \underbrace{\frac{5}{17} \cdot \frac{4}{16}}_{\text{witte}} \cdot \underbrace{\frac{10}{15} \cdot \frac{9}{14} \cdot \frac{8}{13} \cdot \frac{7}{12} \cdot \frac{6}{11}}_{\text{zwarte}} =$

$= \frac{\frac{5!}{2!} \cdot \frac{5!}{3!} \cdot \frac{10!}{5!}}{\frac{20!}{10!}} = \frac{5! \cdot 5! \cdot 10! \cdot 10!}{2! \cdot 3! \cdot 5! \cdot 20!} = 5{,}413 \cdot 10^{-5}$

Weer is deze kans hetzelfde voor elk van de volgordes, dus de kans op precies 3 rode, 2 witte en 5 zwarte ballen is $2520 \cdot 5{,}413 \cdot 10^{-5} = 0{,}1364$ ✓

II-1 $f_X(x) = \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$

$f_Y(y) = \Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2}$

$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \Phi(x)\,dx \Leftrightarrow P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} \Phi(x)\,dx$

$F_Y(y) = \int_{-\infty}^{y} \Phi(y)\,dy \Leftrightarrow P(Y \le y) = \int_{-\infty}^{y} \Phi(y)\,dy$

$Z = X / |Y|$

$F_Z(z) = P(Z \le z) = P(X/|Y| \le z) = P(X \le z|Y|) = \int_{0}^{z|Y|} \Phi(x)\,dx = \ldots$

2 ...

... exp(λ)-verdeling. ✗ Gamma verd.

III - 1 Voor $X_n$ geldt $p_0 = p_1 = \dots = p_9 = \frac{1}{10}$.

$E(X_n) = \sum_{r=0}^{9} r \cdot p_r = \frac{0}{10} + \frac{1}{10} + \dots + \frac{9}{10} = \frac{45}{10} = \frac{9}{2}$ ✓

$\sigma^2(X_n) = E\left( (X_n - EX_n)^2 \right) = E\left( (X_n - \frac{9}{2})^2 \right) = \sum_{r=0}^{9} (r - \frac{9}{2})^2 \cdot p_r =$

$= \sum_{r=0}^{9} (r-\frac{9}{2})^2 \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{10} \sum_{r=0}^{9} (r^2 - 9r + \frac{81}{4}) = \frac{1}{10}\sum_{r=0}^{9} (r^2) - \frac{9}{10}\sum_{r=0}^{9}(r) + \frac{81}{4} =$

$= \frac{285}{10} - \frac{9}{10} \cdot 45 + \frac{81}{4} = \frac{33}{4}$ ✓

Eenvoudiger $EX^2 - (EX)^2$

2 Volgens de Centrale Limietstelling geldt: o.k. maar notatie niet gelukkig

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=0}^{n}(X_i) - nEX}{\sqrt{n \, Var(X)}} = (N(0,1))$$

voor o.o.i.v. stochasten $X_i$ met $EX_i = EX$ en $Var(X_i) = Var(X)$

Vullen we $S_n$, $EX$ en $Var(X)$ in, dan geldt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n - n\cdot\frac{9}{2}}{\sqrt{n \cdot \frac{33}{4}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2S_n - 9n}{\sqrt{33n}} = N(0,1)$$

~~Volgens de definitie geldt verder $P(A_n(\lambda)) = F_{N(0,1)}(\lambda)$~~

Definieer $Y_n = \frac{2S_n - 9n}{\sqrt{33n}}$ dan wordt dit:

$\lim_{n\to\infty} Y_n = N(0,1)$

$P(A_n(\lambda)) = F_{Y_n}(\lambda)$ per definitie van $A_n$ en $Y_n$.

Verder geldt $\lim_{n\to\infty} F_{Y_n}(\lambda) = F_{N(0,1)}(\lambda)$ dus

$$\lim_{n\to\infty} P(A_n(\lambda)) = \lim_{n\to\infty} F_{Y_n}(\lambda) = F_{N(0,1)}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\lambda} e^{-x^2/2}\, dx$$ ✓

Woonplaats: [illegible] | Jaar van eerste inschrijving: [illegible] | Naam docent: [illegible]

IV - 1 $P(X_k \leq x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t}\, dt \Rightarrow f_{X_k} = \lambda e^{-\lambda x} 1_{[0,\infty)}(x)$

$\mu = E(X_k) = \int_0^\infty x \lambda e^{-\lambda x}\, dx = \left[-x e^{-\lambda x}\right]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-\lambda x}\, dx =$

$= 0 - \left[\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x}\right]_0^\infty = - \left(0 - \frac{1}{\lambda}\right) = \frac{1}{\lambda}$ ✓

$\sigma^2(X_k) = E\left(\left(X_k - EX_k\right)^2\right) = E\left(\left(X_k - \frac{1}{\lambda}\right)^2\right) =$

$E\left(X_k^2 - \frac{2}{\lambda} X_k + \frac{1}{\lambda^2}\right) =$

$E(X_k^2) - \frac{2}{\lambda} E(X_k) + \frac{1}{\lambda^2} = E(X_k^2) - \frac{2}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} = E(X_k^2) - \frac{1}{\lambda^2}$

$Y = X_k^2$; $u : X_k \mapsto Y$ met $u(X_k) = X_k^2 \Leftrightarrow u^{-1}(Y) = \sqrt{Y}$

$f_Y(y) = f_{X_k}(u^{-1}(y)) \cdot \left|\frac{d}{dy} u^{-1}(y)\right| = f_{X_k}(\sqrt{y}) \cdot \left|\frac{d}{dy}\sqrt{y}\right| =$

$= \lambda e^{-\lambda\sqrt{y}}\, 1_{[0,\infty)}(y) \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}}$

$E(X_k^2) = E(Y) = \int_0^\infty y \lambda e^{-\lambda\sqrt{y}} \frac{1}{2\sqrt{y}}\, dy = \left[-y\, e^{-\lambda\sqrt{y}}\right]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-\lambda\sqrt{y}}\, dy =$

$\boxed{z = \sqrt{y}}$ $\boxed{dy = 2z\,dz}$

$= 0 + \int_0^\infty e^{-\lambda z}\, dy = \int_0^\infty e^{-\lambda z}\, 2z\, dz = 2\int_0^\infty z e^{-\lambda z}\, dz =$

$2\left(\left[-z \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda z}\right]_0^\infty + \int_0^\infty \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda z}\, dz\right) = 2\left(0 + \left[-\frac{1}{\lambda^2} e^{-\lambda z}\right]_0^\infty\right) = \frac{2}{\lambda^2}$ OK. ✓

$\sigma^2(X_k) = E(X_k^2) - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$ ✓

$\sigma_S^2 = n^2 \sigma_{X_i}^2$

2 De som $S$ van o.o.i.v. exponentiële verdelingen $X_i$ is weer een exp. verdeling, en wel met $\mu_S = n\mu_{X_i}$ en $\sigma_S^2$. Dus hier is $\mu_S = \frac{1}{\lambda_S} = n\lambda$ en $\sigma_S^2 = \frac{1}{\lambda_S^2} = \frac{n^2}{\lambda^2}$. $S_n$ heeft dus een $Exp\left(\frac{\lambda}{n}\right)$-verdeling. X Gamma verd.

Chebichev

3a Volgens de ~~Markov~~-ongelijkheid geldt voor stochasten X:
$P(|X-EX| \geq a) \leq \frac{1}{a^2} Var(X)$ met $a>0$
Dus in dit geval: (omdat $E(\frac{S_n}{n}) = E(X_1) = \mu$)

$P(|\frac{S_n}{n} - \mu| \geq a) \leq \frac{1}{a^2} Var(\frac{S_n}{n} - \mu) = \frac{1}{a^2} Var(\frac{S_n}{n}) = \frac{1}{a^2 n} Var(X_1)$

$= \frac{1}{a^2 n \lambda^2}$

b Dit convergeert inderdaad, want $P(|\frac{S_n}{n} - \mu| \geq a) \leq \frac{1}{a^2 n \lambda^2}$.
Met $n \to \infty$ blijkt dat $P(|\frac{S_n}{n} - \mu| \geq a) \to 0$ voor $a>0$,
dus $Var(|\frac{S_n}{n} - \mu|) \to 0$.